SF1624 Algebra och geometri

Femte föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

4 november, 2009

Multiplikation

Utöver att multiplicera vektorer med skalärer finns det två olika sorters multiplikation av vektorer:

- skalärprodukt - där produkten blir en skalär $\overline{u} \cdot \overline{v}$
- kryssprodukt (eller vektorprodukt) - där produkten blir en vektor $\overline{u} \times \overline{v}$

Skalärprodukt

Vi kan multiplicera vektorer genom

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = |\overline{u}||\overline{v}| \cos\theta$$

där θ är vinkeln mellan vektorerna $\overline{u}$ och $\overline{v}$. Vi kan kolla att detta uppfyller några naturliga räknelagar :

- $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \overline{u}$ $\qquad (\cos\theta = \cos(-\theta))$
- $(\overline{u} + \overline{v}) \cdot \overline{w} = \overline{u} \cdot \overline{w} + \overline{v} \cdot \overline{w}$
- $(a\overline{u}) \cdot \overline{v} = a\overline{u} \cdot \overline{v}$

Skalärprodukt med koordinater

Vi kan använda räknelagarna för att beräkna skalärprodukten direkt från koordinaterna:

Sats

- *För vektorer i planet –* $\mathbb{R}^2$ *– gäller att*

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

- *För vektorer i rummet –* $\mathbb{R}^3$ *– gäller att*

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Speciellt ser vi att längden av en vektor kan fås genom:

$$|\overline{u}|^2 = \overline{u} \cdot \overline{u} \qquad (= x^2 + y^2 + z^2 \text{ om } \overline{u} = (x, y, z) \text{ i } \mathbb{R}^3)$$

Projektion med skalärprodukt

Som vi såg tidigare kan vi projicera en vektor $\overline{u}$ på en vektor v genom

$$\mathrm{Proj}_{\overline{v}}\,\overline{u} = \frac{|\overline{u}|\cos\theta}{|\overline{v}|}\overline{v}$$

där θ är vinkeln mellan $\overline{u}$ och $\overline{v}$. Med hjälp av skalärprodukten kan detta formuleras som

$$\mathrm{Proj}_{\overline{v}}\,\overline{u} = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{v}|^2}\overline{v} = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{\overline{v}\cdot\overline{v}}\overline{v}$$

där vi kan beräkna allt genom att använda koordinaterna för de ingående vektorerna, dvs om $\overline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ och $\overline{v} = (x_2, y_2, z_2)$ så är

$$\mathrm{Proj}_{\overline{v}}\,\overline{u} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}(x_2, y_2, z_2).$$

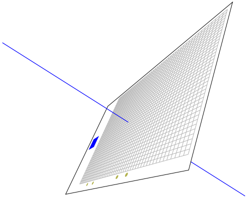
Ortogonalitet

Vektorer som är vinkelräta mot varandra brukar vi kalla ortogonala. Vi kan använda skalärprodukten för att kontrollera om två vektorer är ortogonala:

$$\overline{u} \perp \overline{v} \iff \overline{u} \cdot \overline{v} = 0$$

Plan i rummet

För ett plan i rummet finns två enhetsvektorer som är ortogonala mot alla vektorer i planet. Nollskilda multipler av dessa kallas normalvektorer till planet.



Plan i rummet

Om P_o är en punkt i planet och $\overline{n}$ är en normalvektor till planet gäller att

$$\overline{P_0P} \cdot \overline{n} = 0$$

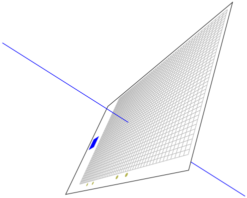
för alla punkter P i planet. Vi kan skriva det som

$$\overline{OP} \cdot \overline{n} = \overline{OP_0} \cdot \overline{n}$$

och om $\overline{n} = (a, b, c)$ får vi ekvationen

$$ax + by + cz = d$$

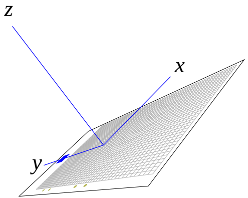
där $d = \overline{OP_0} \cdot \overline{n}$.



Vektorprodukt

Den andra sortens multiplikation av vektorer är vektorprodukten, eller kryssprodukten.

- $\overline{u} \times \overline{v}$ är vinkelrät mot både $\overline{u}$ och $\overline{v}$.
- $|\overline{u} \times \overline{v}| = |\overline{u}||\overline{v}||\sin\theta|$, där θ är vinkeln mellan $\overline{u}$ och $\overline{v}$.
- riktningen av $\overline{u} \times \overline{v}$ ges av att $\overline{u}, \overline{v}, \overline{u} \times \overline{v}$ bildar ett högerorienterat system.



Räkneregler för vektorprodukt

Det går att se från definitionen att följande räkneregler är uppfyllda för vektorprodukten:

- $\overline{u} \times \overline{v} = -\overline{v} \times \overline{u}$
- $\overline{u} \times (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \times \overline{v} + \overline{u} \times \overline{w}$
- $(a\overline{u}) \times \overline{v} = a(\overline{u} \times \overline{v})$

Vektorprodukt från koordinater

Genom räknereglerna och att

- $\overline{e}_x \times \overline{e}_x = \overline{e}_y \times \overline{e}_y = \overline{e}_z \times \overline{e}_z = 0$
- $\overline{e}_x \times \overline{e}_y = \overline{e}_z$, $\overline{e}_y \times \overline{e}_z = \overline{e}_x$ och $\overline{e}_z \times \overline{e}_x = \overline{e}_y$

kan vi uttrycka vektorprodukten i koordinaterna för vektorerna:

Sats

Om $\overline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ och $\overline{v} = (x_2, y_2, z_2)$ gäller att

$$\overline{u} \times \overline{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2).$$